ЯВНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВЕНЕНИЙ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПЛАСТИНЕ

Лабораторная работа №1, 2

План занятия:
1. Цель работы
2. Методы решения уравнений пограничного слоя (методический материал)
3. Дифференциальные уравнения динамического пограничного слоя
4. Описание решаемой задачи
5. Метод решения
6. Порядок проведения моделирования
7. Содержание отчёта
8. Контрольные вопросы

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Расчёт несжимаемого ламинарного динамического пограничного слоя на пластине по явной схеме с устранением нелинейности методом запаздывающих коэффициентов.

2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ (МЕТОДИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ)

Уравнения пограничного слоя (или тонкого вязкого слоя), являются полезной математической моделью для описания некоторых важных течений, встречающихся в инженерных приложениях. К ним относятся струи и следы, двумерные или осесимметричные течения в каналах и трубах, а также классический **пристенный пограничный слой**. Приближение пограничного слоя можно эффективно использовать и для описания некоторых трехмерных течений. Разработаны методы, позволившие применить приближение пограничного слоя для анализа течений с небольшими рециркуляционными областями.

История численных методов решения уравнений пограничного слоя начинается середины тридцатых годов XX века. Методы, используемые сегодня, были созданы в пятидесятые годы. Конечно-разностные методы решения уравнений пограничного слоя **хорошо развиты и апробированы**.

Прежде чем перейти к изучению **конечно-разностных методов** расчета пограничного слоя, полезно напомнить, что в течение многих лет их решения находились другими методами, а для некоторых простых течений необходимые для инженерных приложений результаты были получены в виде простых формул. Эти результаты приведены в учебниках по гидромеханике, аэродинамике и теплообмену. Наиболее важные сведения о вязких течениях можно найти в монографиях Шлихтинга Г[1], Лойцянского Л.Г.[2] и др.

Методы расчета пограничного слоя можно разбить на три группы: **интегральные методы, конечно-разностные методы, методы конечных элементов.**

Интегральные методы можно применять к широкому классу ламинарных и турбулентных течений. До появления достаточно мощных ЭВМ (1960 …) интегральные методы были основными вычислительными методами, которые использовались для решения сложных задач гидродинамики и теплообмена. Характерной чертой этих методов является то, что они преобразуют уравнения в частных производных в обыкновенные

---

[1] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М: Наука, 1974. – 713с.
[2] Лойцянский Л.Г. Ламинарный пограничный слой. – М: Физматгиз, 1962. – 480с.

дифференциальные уравнения. Для этого делаются **некоторые предположения о виде профилей скорости и температуры,** а уравнения интегрируются по одной из независимых переменных. Если можно сделать правильное предположение о виде профилей скорости и температуры в интегрируемых функциях, то **приближённое решение дифференциальных уравнений может быть получено аналитически** без применения ЭВМ.

На практике оказывается, что воспользоваться интегральными методами не так просто, как конечно-разностными (применение интегральных методов требует больше интуиции). Они обычно требуют большей модификации при изменении граничных или каких-либо других условий задачи.

Методы конечных элементов стали использоваться для решения уравнений пограничного слоя с семидесятых годов XX века. Большой вклад в развитие этих методов внесли работы Патанкара С. и Сполдинга Д.[3] Вместе с конечно-разностными методами эти методы являются основой современной вычислительной гидродинамики.

В дальнейшем мы будем рассматривать как конечно-разностные, так и конечно-элементные методы расчёта уравнений пограничного слоя.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Наиболее удобная форма записи уравнений пограничного слоя зависит от рассматриваемой задачи. Так, в случае ламинарных течений часто применяют преобразование координат, позволяющее исключить из расчёта уравнение неразрывности. Уравнение энергии обычно записывается по-разному для сжимаемых и несжимаемых течений.

Если ограничиться рассмотрением действия только **силы давления, силы трения и силы тяжести**, в случае плоского течения и в физической системе координат уравнения **ламинарного динамического пограничного слоя** можно записать следующим образом:

уравнение неразрывности (сохранения массы)**:**

$$\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

уравнения движения (сохранения импульсов):
по оси x

$$\rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial w_x}{\partial y}\right) - \frac{dp}{dx} + \rho g, \tag{2}$$

по оси y

$$p = \text{const} \tag{3}$$

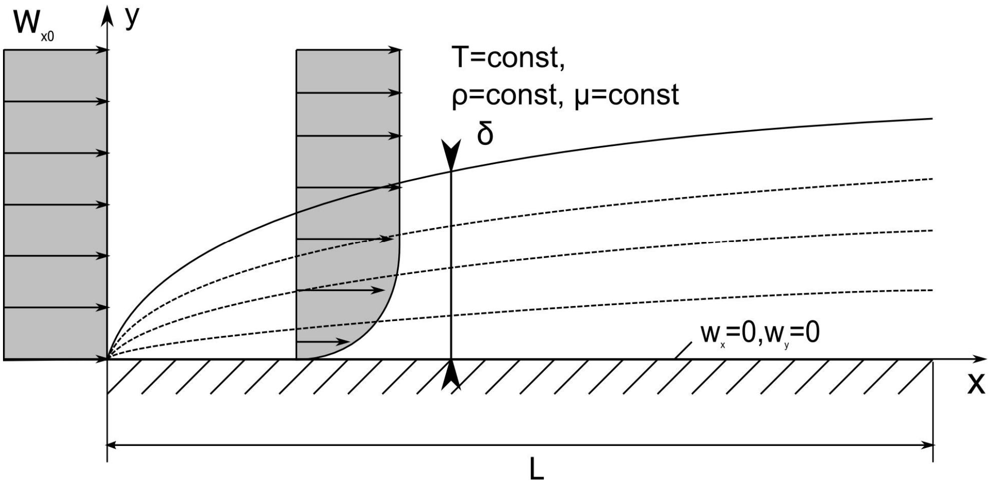
Здесь: ρ - плотность движущейся среды [кг/м^3], w_x, w_y - продольная и поперечная скорость потока [м/с], p - давление [Па], g - ускорение свободного падения [м/с^2], μ - коэффициент динамической вязкости среды, [Па с] x, y - продольная и поперечная координаты.

---

[3] Патанкар С.В., Сполдинг Д. Тепломассообмен в пограничных слоях. – М: Энергия, 1971. – 128с.

4. ОПИСАНИЕ РЕШАЕМОЙ ЗАДАЧИ

Система уравнений (1)-(3) является основой для решения целого ряда задач пограничного слоя. Целью сегодняшней лабораторной работы является расчёт несжимаемого ламинарного динамического пограничного слоя на пластине. Схема течения представлена на рисунке.



Для решения этой задачи систему уравнений можно упростить, приняв постоянное значение плотности среды $\rho = \mathrm{const}$ и динамической вязкости $\mu = \mathrm{const}$ (скорость потока существенно меньше звуковой, течение изотермическое). Кроме того будем считать, что градиент давления вдоль пластины равен нулю и проекция вектора силы тяжести направлена поперёк течения. В итоге получим:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0, \\ &w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $\nu = \mu/\rho$ - коэффициент кинематической вязкости.

Полученная система уравнений является нелинейной, второго порядка в частных производных. Для решения данной системы уравнений необходимо поставить три граничных условия для искомых переменных w_x, w_y. В рассматриваемом случае:

на входе: $w_x(x,y) = w_x(0,y) = w_{x0}$; $w_y(x,y) = w_y(0,y) = 0$;

на стенке: $w_x(x,y) = w_x(x,0) = 0$; $w_y(x,y) = w_y(x,0) = 0$;

во внешнем потоке: $w_x(x,y) = w_x(x,\delta) = w_{x0}$.

Впервые решение этой задачи было получено Блазиусом [4]. Из решения Блазиуса известно, что коэффициент сопротивления трения $c_f/2 = \tau_w / \rho w_{x0}^2 = \mu \left(\partial w_x / \partial y \right)_w / \rho w_{x0}^2$ в зависимости от числа Рейнольдса, построенного по длине пластины $\mathrm{Re}_x = w_{x0} x / \nu$ равен:

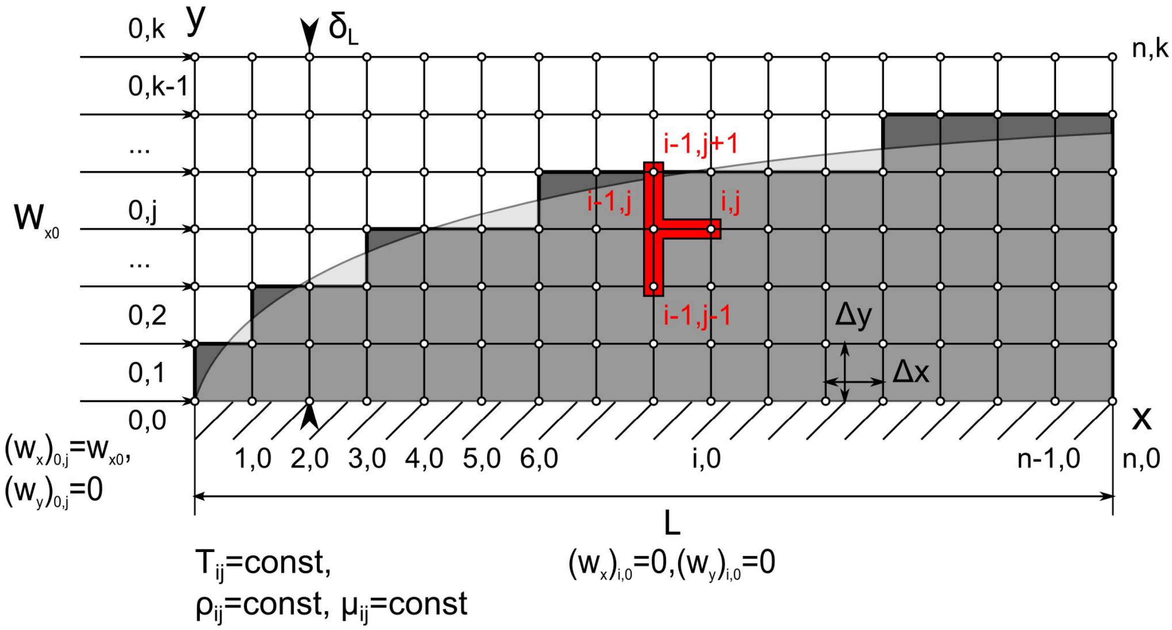
$$\boxed{\frac{c_f}{2} = \frac{0.332}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}}. \tag{5}$$

[4] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М: Наука, 1974. – 713с.

5. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Численные методы решения любых дифференциальных уравнений сводятся к замене непрерывных функций и их производных на функции, определённые в конечном числе узлов расчётной сетки. Эта процедура, названная **дискретизацией** уравнений, приводит к тому, что дифференциальные уравнения можно представить в виде алгебраического уравнения (системы алгебраических уравнений), как правило, линейного и допускающего решение методами линейной алгебры. От выбора способа дискретизации производных в системе уравнений (4) во многом зависит точность, устойчивость и физичность получаемого решения.

Введём сеточные функции $\left(w_x\right)_{i,j}$ и $\left(w_y\right)_{i,j}$ для продольной и поперечной составляющей вектора скорости w. Сеточные функции определены в точках расчётной сетки $\left(x_{i,j}, y_{i,j}\right)$. Примем, что узлы расчётной сетки расположены на равных расстояниях друг от друга (равномерная сетка) по оси x и по оси y, тогда кол-во узлов в расчётной сетке по оси x: $n = L/\Delta x$, а по оси y: $k = \delta_L/\Delta y$, где δ_L - выбранная заранее высота расчётной области, превышающая толщину пограничного слоя на длине L, Δx - шаг дискретизации по оси x, Δy - шаг дискретизации по оси y. Дискретное множество точек и шаблон дискретизации представлены на рисунке ниже.



Высоту расчётной области можно определить из оценок толщины пограничного слоя при ламинарном режиме течения:

$$\delta_L = p \cdot L \cdot \frac{5}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}} = p \cdot L \cdot \frac{5}{\sqrt{\dfrac{w_{x0} \cdot \rho \cdot L}{\mu}}}, \tag{6}$$

где: p - коэффициент запаса расчётной сетки.

Значения искомых переменных, хотя и определены только в узлах расчётной сетки, являются точными. Например, если в каждой точке известны температура и давление потока, а плотность определяется по уравнению состояния идеального газа, то, очевидно, что плотность определена точно: $\rho_{i,j} = P_{i,j} / \left(RT_{i,j}\right)$. Иначе обстоит дело с производными от искомых переменных. Из определения производной следует:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right). \tag{7}$$

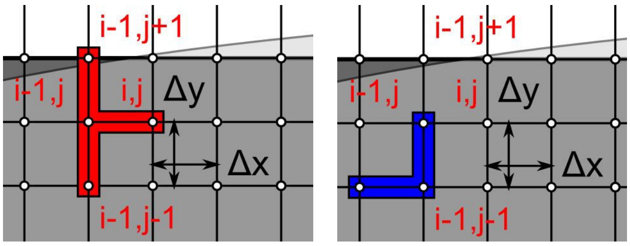
Поскольку на дискретном множестве расчётных узлов $\cancel{\Delta x \to 0}$, то производные определяются приближённо, как:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{x_{i,j} - x_{i-1,j}}, \tag{8}$$

и степень приближения зависит от кол-ва узлов расчётной сетки или шага дискретизации Δx. Кроме того, из соотношения (8) следует, что на дискретном множестве узлов производная определена не в точке i, j, где ищется решение исходной системы уравнений, а в некоторой области, охватывающей все значения функций и независимых переменных, входящие в формулу (8). Совокупность всех точек, участвующих в расчёте значений искомых функций и их производных для исходной системы уравнений, называется **шаблоном дискретизации**. На рисунке выше красным выделен шаблон дискретизации для уравнения движения при явном методе решения уравнения.

В принципе, выбор шаблона дискретизации, а значит и метода решения для системы уравнений или каждого уравнения системы может быть сделан достаточно произвольно, однако, от этого выбора напрямую зависит точность, устойчивость и физичность получаемого решения. Следует помнить, что при выборе шаблона дискретизации для дифференциальных уравнений первого порядка необходимо предусмотреть минимум две точки по каждому из направлений, по которым берутся производные. Для уравнений второго порядка минимум три и т.д.

Для **простого явного метода** решения уравнений пограничного слоя шаблоны дискретизации можно представить следующим образом:



Для уравнения движения – слева, для уравнения неразрывности - справа.

Получим выражения для производных, входящих в уравнения (4), в алгебраической форме, используя разложение функций в ряд Тейлора по соответствующей переменной:

$$\left(w_x\right)_{i-1,j} = \left(w_x\right)_{i,j} - \frac{\Delta x}{1!}\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}\right)_{i,j} + \underbrace{\frac{\Delta x^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2}\right)_{i,j} + \ldots}_{\substack{\text{Отбрасываем} \\ o(\Delta x)}}. \tag{9}$$

Отсюда $\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{\left(w_x\right)_{i,j} - \left(w_x\right)_{i-1,j}}{\Delta x}$. По аналогии $\left(\frac{\partial w_y}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{\left(w_y\right)_{i,j} - \left(w_y\right)_{i,j-1}}{\Delta y}$ и $\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)_{i-1,j} = \frac{\left(w_x\right)_{i-1,j} - \left(w_x\right)_{i-1,j-1}}{\Delta y}$. Для второй производной:

$$\left(w_x\right)_{i-1,j+1}=\left(w_x\right)_{i-1,j}+\frac{\Delta y}{1!}\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)_{i-1,j}+\frac{\Delta y^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}\right)_{i-1,j}+\underbrace{\frac{\Delta y^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 w_x}{\partial y^3}\right)_{i-1,j}+\ldots}_{\substack{\text{Отбрасываем}\\ o(\Delta y^2)}}$$

$$+$$

$$\left(w_x\right)_{i-1,j-1}=\left(w_x\right)_{i-1,j}-\frac{\Delta y}{1!}\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)_{i-1,j}+\frac{\Delta y^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}\right)_{i-1,j}-\underbrace{\frac{\Delta y^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 w_x}{\partial y^3}\right)_{i-1,j}+\ldots}_{\substack{\text{Отбрасываем}\\ o(\Delta y^2)}} \qquad (10)$$

$$\left(w_x\right)_{i-1,j+1}+\left(w_x\right)_{i-1,j-1}=2\cdot\left(w_x\right)_{i-1,j}+\Delta y^2\cdot\left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}\right)_{i-1,j}+o(\Delta y^2)$$

В итоге получим:

$$\left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}\right)_{i-1,j}=\frac{\left(w_x\right)_{i-1,j+1}-2\cdot\left(w_x\right)_{i-1,j}+\left(w_x\right)_{i-1,j-1}}{\Delta y^2} \qquad (11)$$

Подставляя полученные соотношения в систему уравнений (4), можно записать дискретный аналог уравнений пограничного слоя:

$$\begin{cases}\left(w_x\right)_{i,j}\left(\dfrac{\left(w_x\right)_{i,j}-\left(w_x\right)_{i-1,j}}{\Delta x}\right)+\left(w_y\right)_{i,j}\left(\dfrac{\left(w_x\right)_{i-1,j}-\left(w_x\right)_{i-1,j-1}}{\Delta y}\right)=\nu\left(\dfrac{\left(w_x\right)_{i-1,j+1}-2\left(w_x\right)_{i-1,j}+\left(w_x\right)_{i-1,j-1}}{\Delta y^2}\right);\\ \dfrac{\left(w_x\right)_{i,j-1}-\left(w_x\right)_{i-1,j-1}}{\Delta x}+\dfrac{\left(w_y\right)_{i,j}-\left(w_y\right)_{i,j-1}}{\Delta y}=0.\end{cases} \qquad (12)$$

Поскольку уравнения (4) являются параболическими уравнениями, допускающими решение маршевым методом в направлении оси x, неизвестными в системе уравнений (12) являются только искомые переменные $\left(w_x\right)_{i,j}$ и $\left(w_y\right)_{i,j}$. При этом $\left(w_x\right)_{i,j}$ может быть определена из уравнения движения, а $\left(w_y\right)_{i,j}$ из уравнения неразрывности.

Следует обратить внимание на то, что неизвестная $\left(w_x\right)_{i,j}$ входит в уравнение движения в квадрате, что делает это уравнение нелинейным относительно искомой переменной. Существуют различные методы устранения нелинейности при решении дифференциальных уравнений. Одним из самых простых является **метод запаздывающих коэффициентов**. Суть метода заключается в замене одного из вхождения искомой переменной на её значение в одной из ближайших точек с известным решением. В нашем случае уравнение движения из (12) можно представить следующим образом:

$$\left(w_x\right)_{i-1,j}\left(\frac{\left(w_x\right)_{i,j}-\left(w_x\right)_{i-1,j}}{\Delta x}\right)+\left(w_y\right)_{i,j}\left(\frac{\left(w_x\right)_{i-1,j}-\left(w_x\right)_{i-1,j-1}}{\Delta y}\right)=\nu\left(\frac{\left(w_x\right)_{i-1,j+1}-2\left(w_x\right)_{i-1,j}+\left(w_x\right)_{i-1,j-1}}{\Delta y^2}\right) \qquad (13)$$

Очевидно, что при уменьшении шага дискретизации Δx значение $\left(w_x\right)_{i-1,j}$ будет всё ближе к искомой $\left(w_x\right)_{i,j}$. На грубых сетках метод запаздывающих коэффициентов может давать существенные ошибки в решении.

Обратим внимание на то, что уравнение движения является сопряжённым с уравнением неразрывности, т.к. содержит переменную, значение которой может быть определено только из решения уравнения неразрывности - $\left(w_y\right)_{i,j}$. С другой стороны, уравнение неразрывности не может быть решено пока неизвестно значение $(w_x)_{i,j}$. Конечно, можно найти разные подходы для решения связанной системы линейных уравнений, однако наиболее простой из них – это опять же **метод запаздывающих коэффициентов**. Так, если в уравнении движения заменить $(w_y)_{i,j}$ на $(w_y)_{i-1,j}$, определённую на предыдущем шаге по оси x, то это уравнение становится несопряжённым с уравнением неразрывности и они могут быть решены независимо друг от друга.

Итак, применяя **явный метод** дискретизации уравнений пограничного слоя и **метод запаздывающих коэффициентов для устранения нелинейности и сопряжённости уравнений,** мы получили два линейных уравнения, определённые в произвольном узле расчётной области, позволяющие решить поставленную задачу.

$$\begin{cases} (w_x)_{i,j} = (w_x)_{i-1,j} + \dfrac{\nu \Delta x}{(w_x)_{i-1,j}} \left(\dfrac{(w_x)_{i-1,j+1} - 2(w_x)_{i-1,j} + (w_x)_{i-1,j-1}}{\Delta y^2} \right) - \Delta x \dfrac{(w_y)_{i-1,j}}{(w_x)_{i-1,j}} \left(\dfrac{(w_x)_{i-1,j} - (w_x)_{i-1,j-1}}{\Delta y} \right); \\ (w_y)_{i,j} = (w_y)_{i,j-1} - \Delta y \dfrac{(w_x)_{i,j-1} - (w_x)_{i-1,j-1}}{\Delta x}. \end{cases} \tag{14}$$

Записанные нами дискретные аналоги уравнений пограничного слоя для решаемой задачи являются линейными относительно искомых переменных.

Граничные условия в дискретной форме можно записать следующим образом: $(w_x)_{0,j} = w_{x0}$, $(w_y)_{0,j} = 0$, $(w_x)_{i,0} = 0$, $(w_y)_{i,0} = 0$, $(w_x)_{i,k} = w_{x0}$.

Хотя явный метод является очень простым в реализации, в настоящее время его почти не используют, т.к. **условия устойчивости** накладывают существенные ограничения на соотношения шагов по x и по y. Подробно анализ устойчивости численных схем мы рассматривать не будем, укажем лишь на то, что явный метод решения уравнений пограничного слоя устойчив при:

$$\frac{2\nu\Delta x}{(w_x)_{i,j}(\Delta y)^2} \le 1; \quad \frac{(w_y)_{i,j}^2 \Delta x}{(w_x)_{i,j}\nu} \le 2. \tag{15}$$

Условия устойчивости должны выполняться в каждой точке расчётной области.

6. ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ

1. Получить задание для моделирования течения в ламинарном пограничном слое на пластине:

Среда:

Скорость набегающего потока:

Температура набегающего потока:

Длина пластины:

2. Подготовить программу на языке Fortran реализующую явный метод численного интегрирования уравнений динамического пограничного слоя с устранением нелинейности методом запаздывающих коэффициентов.

3. Провести компиляцию и отладку программы.

4. Определить параметры расчётной сетки исходя из условий устойчивости.

5. Выполнить расчёты профилей скорости на расстоянии 20, 40, 60 ,80 ,100 % от длины пластины. Построить графики в программе Excel, Origin или др. Сделать выводы о росте толщины пограничного слоя. Занести полученные данные в отчёт.

6. Выполнить расчёты интегральных параметров течения (локального коэффициента поверхностного трения) в зависимости от локального числа Рейнольдса для различного кол-ва узлов расчётной сетки по осям x и y, соблюдая условия устойчивости численного метода. Построить график зависимости коэффициента трения от числа Рейнольдса в логарифмических координатах. Нанести на график формулу Блазиуса. Сделать выводы о влиянии сетки на результаты расчётов интегральных параметров течения. Занести полученные результаты в отчёт.

7. Занести текст программы в отчёт.

8. Оформить отчёт. Подготовиться к защите лабораторной работы.

7. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЁТА

1. Титульный лист.

2. Цель работы.

3. Схема решаемой задачи с указанием расчётной области, граничных условий и параметров задачи.

4. Основные формулы, используемые при расчетах.

5. Результаты моделирования.

6. Текст программы.

7. Выводы по работе.

8. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется пограничным слоем?

2. Как зависит коэффициент трения о числа Рейнольдса?

3. Понятие толщины пограничного слоя?

4. Как толщина динамического пограничного слоя зависит от длины пластины?

5. Решение Блазиуса?

6. Критерий устойчивости явного метода?

7. Как влияет шаг расчётной сетки на точность расчёта интегральных параметров течения?